

1 Preuves A Connaitre (PAC)

1.1 Chapitre 1

1.1.1 Les identités structurales usuelles.

- Soit Z_1 et Z_2 des nombres complexes, alors on a les égalités:

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$\overline{Z_1 \times Z_2} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$$

$$|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$$

- Demonstrations:

$$Z_1 = a + ib$$

$$Z_2 = a' + ib'$$

$$- \overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} :$$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{a + ib + a' + ib'} = a + a' - i(b + b')$$

or

$$\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = \overline{a + ib} + \overline{a' + ib'} = a + a' - i(b + b')$$

donc:

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$- \overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \overline{Z_2} :$$

$$Z_1 Z_2 = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

$$\overline{Z_1 Z_2} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

or

$$\overline{Z_1} \overline{Z_2} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

donc:

$$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \overline{Z_2}$$

$$- |Z_1 Z_2| = |Z_1| |Z_2| :$$

$$Z_1 = a + ib, \quad Z_2 = a' + ib'$$

$$Z_1 Z_2 = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

$$|Z_1 Z_2|^2 = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2$$

– Développer séparément :

$$|Z_1|^2 = a^2 + b^2, \quad |Z_2|^2 = a'^2 + b'^2$$

Produit :

$$|Z_1|^2 |Z_2|^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

Égalité d'identité algébrique :

$$(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

Donc :

$$\begin{aligned} |Z_1 Z_2|^2 &= |Z_1|^2 |Z_2|^2 \\ |Z_1 Z_2| &= |Z_1| |Z_2| \end{aligned}$$

1.1.2 Solutions d'un polynôme du second degré

- Soit $Z_1, Z_2 \in \mathbf{C}$ des solutions d'un polynôme de degré 2 telles que:

$$a(z - Z_1)(z - Z_2) = az^2 + bz + c$$

on cherche à vérifier que Z_1 et Z_2 sont solutions de $az^2 + bz + c$

- Démonstration:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{-b + \delta}{2a} \\ Z_2 &= \frac{-b - \delta}{2a} \end{aligned}$$

Avec $\delta^2 = \Delta$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

On obtient donc avec le membre de gauche:

$$\begin{aligned} a(z - Z_1)(z - Z_2) &= a \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right) \\ &= a \left(z^2 - z \times \left(\frac{-b - \delta}{2a} + \frac{-b + \delta}{2a} \right) + \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

or $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$

$$= a \left(z^2 + z \frac{b}{a} + \frac{-b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \right) = \boxed{az^2 + bz + c}$$

Qui correspond au membre de droite donc à une équation de degré 2.